УДК 517.575

О ТОЖДЕСТВАХ НА СФЕРЕ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В.В. Карачик[1]

1 *karachik@susu.ru*; Южно-Уральский государственный университет

В статье получены тождества для интегралов по единичной сфере от нормальных производных полигармонических функций в единичном шаре.

Ключевые слова: полигармонические функции, нормальные производные, тождества на сфере.

Известно, что для гармонической в единичном шаре $S \subset \mathbb{R}^n$ функции $u \in C^m(\bar{S})$ верно равенство (см. например, [1])

$$\int_{\partial S} \frac{\partial^m u}{\partial \nu^m}\, ds_x = 0, \quad m \in \mathbb{N},$$

где $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ – производная по направлению внешней нормали к ∂S. В настоящей работе выясняется, какие еще равенства такого вида могут иметь место для нормальных производных от k-гармонических в S функций $u(x)$, т.е. таких функций, что $\Delta^k u = 0$ в S. В работе [2] исследовано свойство среднего для полигармонических функций и получены некоторые результаты, на основании которых выполнено настоящее исследование. Пусть полиномы $P_n(t)$ находятся из рекуррентного равенства

$$P_n(t) + (2n-3)P_{n-1}(t) = t^2 P_{n-2}(t), \quad n \geq 2,$$

где следует считать, что $P_0(t) = 1$, $P_1(t) = 1$.

Теорема 1. *Для всякой m-гармонической в S функции $u \in C^k(\bar{S})$ при $k \geq m$ верны равенства*

$$\int_{\partial S} P_{m-i}\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\frac{\partial^{2i} u}{\partial \nu^{2i}}\, ds_x = 0, \quad \int_{\partial S} \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\, ds_x = 0,$$

где $0 \leq i \leq m-1$ и $2m \leq j \leq k$ при $2m \leq k$.

В работе [3] при исследовании арифметического треугольника, возникающего из условий разрешимости задачи Неймана для полигармонического уравнения, был получен арифметический треугольник, похожий на арифметический треугольник, который составляют коэффициенты полиномов $P_n(t)$.

Пример. Если k-гармоническая в S функция $u \in C^k(\bar{S})$ удовлетворяет на ∂S равенствам

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\Big|_{\partial S} = \varphi_j(x), \quad j = 1, \ldots, k$$

т.е. $u(x)$ – решение однородной задачи Неймана [4] для полигармонического уравнения в S, то для функций $\varphi_j(x)$, $j = 1, \ldots, k$, по теореме 1, необходимо выполнение условия [5]

$$\int_{\partial S} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+k} \binom{2k-j-1}{j-1} (2k-2j-1)!!\, \varphi_j(x)\, ds_x = 0.$$

Литература

1. Карачик В. В. *О свойстве среднего для полигармонических функций в шаре* // Математические труды. – 2013. – Т. 16. – № 2. – С. 69–88.

2. Karachik V. V. *On the mean-value property for polyharmonic functions* // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2013. – Т. 6. – № 3. – С. 59–66.

3. Карачик В. В. *Об арифметическом треугольнике, возникающем из условий разрешимости задачи Неймана* // Математические заметки. – 2014. – Т. 96. – № 2. – С. 228–238.

4. Карачик В. В. *Условия разрешимости задачи Неймана для однородного полигармонического уравнения* // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50. – № 11. – С. 1455–1461.

5. Карачик В. В. *Об условиях разрешимости задачи Неймана для полигармонического уравнения в единичном шаре* // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2013. – Т. XVI. – № 4(56). – С. 61–74.

ON IDENTITIES ON THE UNIT SPHERE FOR POLYHARMONIC FUNCTIONS

V.V. Karachik

Some identities for integrals over the unit sphere of the normal derivatives of polyharmonic in the unit ball functions are obtained.

Keywords: polyharmonic functions, normal derivatives, identities on the unit sphere.

УДК 517.982

ОБ УСЛОВИЯХ КОМПАКТНОСТИ В ПРОСТРАНСТВАХ $\varphi(L)$

И.Н. Катковская[1], В.Г. Кротов[2]

1 *ikatkovskaya@bntu.by*; Белорусский национальный технический университет
2 *krotov@bsu.by*; Белорусский государственный университет

В работе приводятся критерии компактности множеств в пространствах $\varphi(L)$, *состоящих из классов эквивалентности измеримых функций* f, *для которых композиция* $\varphi\circ f$ *суммируема на метрическом пространстве* X *с мерой, удовлетворяющей условию удвоения. Здесь* $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *— четная функция, положительная, непрерывная и возрастающая на* $(0,+\infty)$, *причем* $\varphi(+0)=0$, $\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=\infty$. *Кроме того, предполагается, что* φ *удовлетворяет* Δ_2*-условию Орлича. Критерии компактности формулируются в терминах максимальных операторов, измеряющих локальную гладкость.*

Ключевые слова: условие удвоения, компактность, пространства суммируемых функций, максимальные операторы, локальная гладкость.

Пусть (X,d,μ) — ограниченное метрическое пространство с метрикой d и борелевской мерой μ, удовлетворяющее условию удвоения

$$\mu(B(x,2r))\le C_\mu\mu(B(x,r)),\quad x\in X,\ r>0,$$

где $B(x,r)=\{y\in X: d(x,y)<r\}$.